МІНІСТЕРСТІО АГРАРНОЇ ПОЛІТИКИ ТА ПРОДОВОЛЬСТВА УКРАЇНИ

АГРАРНИЙ КОЛЕДЖ УПРАВЛІННЯ І ПРАВА

ПОЛТАВСЬКОЇ ДЕРЖАВНОЇ АГРАРНОЇ АКАДЕМІЇ

МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

Методика розв`язування задач

Методичні рекомендації та задачі для самостійного розв'язування для студентів та викладачів ВНЗ I-II рівня акредитації

ПОЛТАВА 2013

Укладач: Худолій Іван Іванович - викладач фізики та астрономії Аграрного коледжу управління і права Полтавської державної аграрної академії

Посібник містить теоретичний матеріал, методику та приклади розв'язування задач, задачі для самостійного розв'язування з теми «Механічні коливання і хвилі»

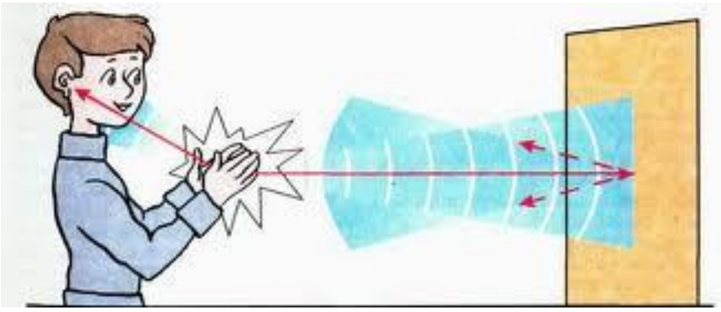
Розглянуто та схвалено
на засіданні циклової комісії
Протокол № ___ від «___»________20___ року

Голова циклової комісії ___________________

МЕХАНІЧНІ КОЛИВАННЯ ТА ХВИЛІ

1. Методика розв’язування задач на механічні коливання та хвилі

До коливальних процесів відносяться такі, що в тій чи іншій мірі повторюються. Якщо, наприклад, до пружини, закріпленої на штативі, підвісити тягарець, то пружина розтягнеться до певної довжини. При цьому сила пружності зрівноважить силу тяжіння. Якщо тепер тягарець вивести з положення рівноваги і відпустити, він почне коливатися. З часом його коливання затухатимуть і припиняться зовсім. Тут коливання відбуваються лише за рахунок внутрішніх сил системи. Проте для того, щоб вони почалися, систему треба вивести з положення рівноваги. Такі коливання вважають вільними.



Коливання, які відбуваються пі дією зовнішньої періодичної сили, називають вимушеними. Коли вимушені коливання здійснюються в системі, в якій можливі й вільні коливання, то при збігу часто змушуючої сили і вільних коливань спостерігається явище резонансу.

Відстань тіла, що здійснює коливання, від положення рівноваги називається зміщенням x. Найбільше зміщення тіла від положення рівноваги називається амплітудою A (або X_{max}).

Період коливання T – час, протягом якого рух тіла повністю повторюється. За період тіло проходить усі точки траєкторії (крім двох крайніх точок) двічі – раз в одному напрямі і ще раз – у протилежному.

Якщо відбулось n повних коливань за час t, то період коливань можна визначити за формулою $T = \frac{t}{n}$.

Кількість коливань за одиницю часу називається частотою коливань f (або ν). Частота коливань пов'язана з періодом коливань простим співвідношенням $\nu = \frac{1}{T}$.

Колова або циклічна частота – кількість коливань за 2π секунд:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T},$$

Перехід коливань тягарця на пружині (пружинний маятник) в ідеальному випадку (втрат енергії в системі не має) залежить тільки від маси m тягарця і коефіцієнта жорсткості пружини K.

Значну частину задач складають задачі з математичним маятником, який являє собою матеріальну точку, підвішену на невагомій нитці, яка в процесі коливань не розтягується. Період коливань цього маятника для невеликих ($\approx 5^o$) відхилень від положень рівноваги не залежить від амплітуди і залежить тільки від довжини маятника (відстань від точки підвісу до центра ваги матеріальної точки) та прискорення вільного падіння. Якщо ж точка підвісу математичного маятника рухається з прискоренням вверх, то період коливань його зменшується, а коли вниз – збільшується проти періоду при нерухомій точці підвісу.

Присутність повітря за рахунок тертя швидше приводить до припинення коливань, ніж помітно починає впливати на значення періоду коливань.

У шкільному курсі фізики розглядаються в основному гармонічні коливання. Умовно можна вважати гармонічними й затухаючі коливання з незначним затуханням.

Рівняння незатухаючих гармонічних коливань, тобто коливань, амплітуда яких з часом не змінюється, має вигляд

$$x = A\sin\omega t \quad \text{або} \quad x = A\cos\omega t.$$

Тобто це коливання, у яких величина, що коливається (шлях, швидкість, прискорення, сила, сила струму, напруга та ін.) змінюється за законом синуса чи косинуса.

При розв'язуванні значної кількості задач доводиться використовувати закон збереження енергії. Якщо нехтувати втратами механічної енергії в системі, то для коливань тягарця на пружині повна енергія в будь-який момент часу дорівнює сумі кінетичної енергії тягарця, що здійснює коливання, і потенціальної енергії деформованої пружини:

$$E = \frac{m\upsilon_x^2}{2} + \frac{kx^2}{2};$$

де m – маса тягарця; υ_x – швидкість руху тягарця в даний момент; k – коефіцієнт жорсткості пружини; x – зміщення тягарця від положення рівноваги в даний момент часу.

Часто доводиться використовувати при розв'язуванні задач рівність максимальних значень енергій:

$$E = \frac{kx_{\max}^2}{2} = \frac{m\upsilon_0^2}{2},$$

де υ_0 – максимальне значення швидкості; x_{max} – максимальне зміщення тягарця від положення рівноваги (амплітуда).

Остання рівність справедлива для випадку, коли втратами енергії можна знехтувати.

Якщо коливання частинки відбувається в пружному середовищі, то вони будуть передаватись іншим частинкам. Це розповсюдження коливань від точки до точки, від частинки до частинки називається хвилею. Швидкість цього розповсюдження називається швидкістю хвилі υ.

Відстань, на яку розповсюджується коливання за період коливань T, і є довжина хвилі λ. Отже

$$\lambda = \upsilon T = \frac{\upsilon}{\nu}$$

2 Базові формули до розділу "Механічні коливання та хвилі"

1. Закон незатухаючих (власних) гармонічних коливань

$$x=A\sin(\omega_0 t+\varphi_0), \text{ або } x=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0),$$

де x – координата маятника в любий момент часу t;

A – амплітуда коливань;

ω_0 – власна циклічна частота;

φ_0 – початкова фаза коливань.

2. Частота коливань

$$\nu = \frac{1}{T},$$

де T – період коливань.

3. Циклічна частота власних коливань пружинного маятника

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}},$$

де k – коефіцієнт жорсткості пружини;

m – маса маятника.

4. Циклічна частота власних коливань математичного маятника довжиною l

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}},$$

5. Період коливань:

- пружинного маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$;
- математичного маятника $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

5а. Період коливань математичного маятника, точка підвісу якого рухається з прискоренням $\vec{a}$ по вертикалі

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{|\vec{g} - \vec{a}|}}$$

6. Миттєва швидкість власних коливань

$$\upsilon = \dot{x} = \left[A\cos(\omega_0 t + \varphi_0)\right]' = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де максимальне значення швидкості маятника

$$\upsilon_{max} = A\omega_0$$

7. Миттєве прискорення власних коливань

$$a = \dot{\upsilon} = \left[-A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_0)\right]' = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi_0),$$

де максимальне значення прискорення маятника

$$a_{max}=A\omega_0^2$$

8. Повна енергія маятника

$$E=W_n+W_к$$

9. Миттєве значення потенціальної енергії пружинного маятника

$$W_n=\frac{kx^2}{2}=\frac{kA^2}{2}\cos^2(\omega_0 t+\varphi_0),$$

де максимальне значення потенціальної енергії

$$W_{n\max}=\frac{kA^2}{2}$$

10. Миттєве значення кінетичної енергії маятника

$$W_к=\frac{m\upsilon^2}{2}=\frac{mA^2\omega_0^2}{2}\sin^2(\omega_0 t+\varphi_0),$$

де максимальне значення кінетичної енергії

$$W_{к\max}=\frac{mA^2\omega_0^2}{2}$$

11. Співвідношення енергій незатухаючих коливань маятника

$$W_{к\,max}=W_{n\,max}=E$$

12. Рівняння хвилі, що розповсюджується вздовж напрямку r

$$x=A\cos\omega\left(t-\frac{r}{\upsilon}\right)=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi r}{\lambda}\right),$$

де r – відстань, яку хвиля проходить зі швидкістю υ за час t;

A – амплітуда коливань хвилі.

13. Довжина хвилі

$$\lambda=\frac{\upsilon}{\nu}=\upsilon T\ ,$$

де ν - частота , T – період коливань хвилі.

3 Приклади розв'язування задач

Задача 1. Коливання вантажу масою *1*кг на пружині описується рівнянням $x = 0{,}1\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$. Визначити: 1) амплітуду коливань; 2) колову частоту; 3) частоту; 4) період; 5) початкову фазу; 6) повну енергію; 7) максимальну швидкість руху вантажу; 8) коефіцієнт жорсткості пружини.

Дано:	Розв'язання
$m=1$ кг $x = 0{,}1\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right)$	Порівнюючи формулу гармонічних коливань в умові задачі з базовою формулою 1 та використовуючи інші базові формули, приходимо до висновку:
A - ? ω - ? ν - ? T - ? φ_0 - ? E - ? υ_{max} - ? k - ?	1. $A=1$ *м*. 2. $\omega=1$ *1/с*. 3. $\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{6{,}28} = 0{,}16$ *1/с*.

$$4.\ T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{\nu} = 2\pi\ с.\ \ 5.\ \varphi_0 = \frac{\pi}{2}.\quad 6.\ E = \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{1\cdot 1\cdot 0{,}01}{2} = 0{,}005\,Дж$$

$$7.\ \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{m\upsilon_{\max}^2}{2} \Rightarrow \upsilon_{\max} = \omega A = 0{,}1\,м/с \quad 8.\ \frac{m\omega^2 A^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \Rightarrow\ k = m\omega^2 = 1\frac{Н}{м}.$$

Задача 2. Візок, на якому закріплений механічний маятник з періодом коливань *0,5 с*, скочується по похилій площині, а потім по горизонтальній ділянці шляху. Похила площина утворює з горизонтом кут 45^o. Який буде період коливань маятника, коли: а) візок скочується по похилій площині; б) їде по горизонтальній дільниці шляху? Тертя не враховувати.

Дано:	Розв'язання
$T=0{,}5$ *с* $\alpha=45^o$	Припустимо, що маятник коливається вздовж напряму руху візка. а) При скочуванні візка з похилої площини ма-
T_1 - ? T_2 - ?	ятник разом з візком рухається у відношенні Землі посту-

пально і рівноприскорено і коливається відносно візка (рис. 4.1). Прискорення маятника (і візка) в поступальному русі обумовлюється складової сили тяжіння:

$$F_1 = mg\sin\alpha$$

Ця складова не може змінити положення маятника відносно візка, а отже не може впливати на період коливань його. Коливання маятника відносно візка обумовлюються лише дією складової сили тяжіння $F_2=mg\cos\alpha$, перпендикулярної до поверхні візка, тобто маятник коливається так, ніби на нього діє сила тяжіння не mg, а $mg\cos\alpha$.

Прискорення вільного падіння, що відповідало б такому значенню сили тяжіння, повинно становити $g_1=g\cos\alpha$.

В зв'язку з цим період коливань маятника на візку, що скочується з похилої площини, дорівнюватиме

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g\cos\alpha}}$$

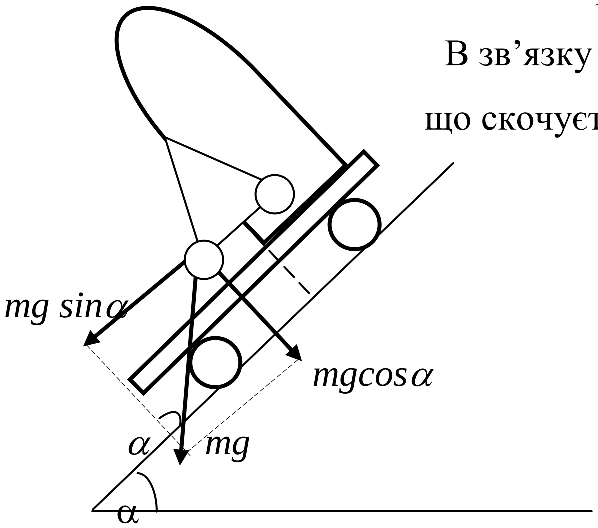


Рис.1

Але $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, де T – період коливань при рівномірному русі по горизонту.

Тоді $\frac{T_1}{T} = \sqrt{\frac{1}{\cos\alpha}}$; $T_1 = T\sqrt{\frac{1}{\cos\alpha}} \approx 0{,}6\,c$.

Задача 3. Визначити, на скільки відстане маятниковий годинник за добу, якщо його підняти на висоту h над поверхнею Землі.

Дано:	Розв'язання
t_0=24 год.	Періоди коливань маятника на поверхні Землі і на висоті h
h	будуть:
Δt - ?	$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}$ $\quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g_h}}$

З врахуванням

$$g_n = g_0\frac{R^2}{(R+h)^2} \qquad T = 2\pi\frac{R+h}{R}\sqrt{\frac{l}{g_0}}.$$

Відставання

$$\Delta t = t_0 - t \Rightarrow \quad \frac{\Delta t}{t_0} = 1 - \frac{t}{t_0}$$

Відношення показань годинника

$$\frac{t}{t_0} = \frac{T_0}{T}.$$

Отже

$$\frac{\Delta t}{t_0} = 1 - \frac{2\pi\sqrt{\frac{l}{g_0}}}{2\pi\frac{R+h}{R}\sqrt{\frac{l}{g_0}}} = 1 - \frac{R}{R+h} = \frac{h}{R+h}.$$

Таким чином $\quad \Delta t = t_0 \dfrac{h}{R+h}.$

Задача 4. Період коливань одного математичного маятника T_1, а другого T_2. Яким буде період математичного маятника, довжина якого буде рівною сумі довжин даних маятників?

Дано:	Розв'язання
T_1	За умовою $T = 2\pi\sqrt{\frac{l_1 + l_2}{g}}$. Довжина маятників l_1 і l_2 знаходимо з
T_2	$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g}} \Rightarrow \quad l_1 = \frac{gT_1^2}{4\pi^2} \quad i \quad T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{l_2}{g}} \Rightarrow \quad l_2 = \frac{gT_2^2}{4\pi^2}.$
$l = l_1 + l_2$	
T - ?	Тоді $T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{\frac{gT_1^2}{4\pi^2} + \frac{gT_2^2}{4\pi^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \cdot \frac{\sqrt{g}}{2\pi}\sqrt{T_1^2 + T_2^2}.$

Отже $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$.

Задача 5. Знайти період коливань математичного маятника довжиною l, підвішеного в вагоні, що рухається горизонтально з прискоренням a.

Дано:	Розв'язання
l	Коливання маятника відбувається у вертикальній площині
a	так, ніби сила тяжіння в цій системі буде рівна силі натягу
T - ?	нитки F.

З рис. 2

$$F = \sqrt{m^2 a^2 + m^2 g^2} = m\sqrt{a^2 + g^2}$$

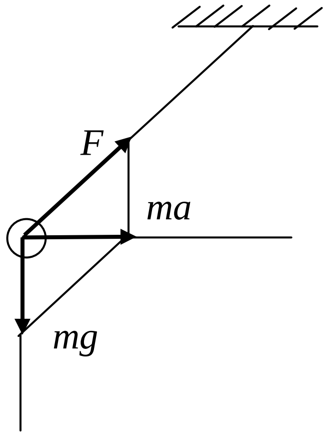


Рис. 2

Тоді ця сила надає прискорення

$$g_1 = \frac{F}{m} = \sqrt{a^2 + g^2}\ .$$

Таким чином період коливань цього математичного маятника буде

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{\sqrt{a^2 + g^2}}}\ .$$

Задача 6. Яку довжину має підвіс маятника Фуко, якщо уявити собі, що маятник встановлений на планеті, густина якої дорівнює густині Землі, а радіус в два рази менший. Маятник здійснює три коливання на хвилину.

Дано:	Розв'язання
$\rho_1=\rho$	Довжину підвісу математичного маятника l знаходимо з
$R_1=R_з/2$	формули його періоду коливань
$t=1$ *хв.*	$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \Rightarrow \quad l = \frac{gT^2}{4\pi^2}\ .$
$N=3$	Вираз для прискорення вільного падіння знайдемо з порів-
l_1 - ?	няння сили ваги mg і сили тяжіння $\frac{GmM}{R^2}$.

$$mg = \frac{GmM}{R^2} \quad \Rightarrow \quad g = \frac{GM}{R^2}\ ;$$

Маса планети через густину і об'єм $M = \rho \upsilon = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$. Таким чином

$$g = \frac{G}{R^2} \cdot \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \Rightarrow \quad g = \frac{4}{3}\pi \rho G R.$$

Для Землі $g_з = \frac{4}{3}\pi \rho G R_з$. Для планети з умови задачі $g_n = \frac{4}{3}\pi \rho_1 G R_1$.

Тоді $\frac{g_n}{g_з} = \frac{\rho_1 R_1}{\rho R_з} = \frac{1}{2}$.

Тобто $g_n = \frac{1}{2} g_з$.

Період коливань маятника на планеті:

$$T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{l_1}{g_n}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_1 \cdot 2}{g_з}} \quad l_1 = \frac{g_з \cdot T_1^2}{8\pi^2}; \quad T_1 = \frac{t}{N} \quad l_1 = \frac{g_з \cdot t^2}{8\pi^2 N^2} = 50\,м.$$

Задача 7. Кулька підвішена на довгій нитці. Один раз її піднімають по вертикалі до точки підвісу, другий раз її відхиляють, як маятник до такої ж висоти. В якому з цих випадків кулька швидше повернеться до положення рівноваги, якщо її відпустити. Вважаємо, що період коливань маятника приблизно такий, як в разі відхилення його на невеликий кут.

Розв'язання

Час t_1 вільного падіння кульки з висоти, що дорівнює довжині нитки l, становить $t_1 = \sqrt{\frac{2l}{g}}$.

Час t_2 повернення кульки з відхиленого положення до положення рівноваги дорівнює $T/4$, де T – період коливань. Але

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}, \quad тоді \quad t_2 = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} \quad і \quad \frac{t_1}{t_2} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \approx 0{,}9.$$

Задача 8. Горизонтальна підставка з бруском, що лежить на ній, виконує горизонтальні гармонічні коливання з періодом *0,5 с*. Коефіцієнт тертя бруска по підставці *0,1*. При якій амплітуді коливань брусок проковзуватиме на підставці при коливаннях?

Дано:	Розв'язання
$T=0,5\ c$	З закону гармонічного коливання $x=A\sin\omega t$ як друга похідна
$\mu=0,1$	випливає прискорення підставки:
A - ?	$a_n= - A\omega^2\sin\omega t$. Максимальне по модулю значення цього прис-

корення $a_n=A\omega^2$. Прискорення бруску надає сила тертя між ним і горизонтальною підвіскою $\mu mg=m_a\upsilon \ \Rightarrow \ a_б=\mu g$.

Брусок почне просковзувати якщо $a_n>a_б$, тобто

$A\omega^2>\mu g$. Враховуючи $\omega=\frac{2\pi}{T}$ одержимо:

$$A>\frac{\mu g T^2}{4\pi^2}=6,2\,мм\,.$$

Задача 9. Матеріальна точка здійснює гармонічні коливання вздовж осі х навколо положення рівноваги $x=0$. Частота коливань $\omega=4\ 1/c$. Визначити, в який момент часу після проходження положення рівноваги точка буде мати координату *25 см* і швидкість *100 см/с*.

Дано:	Розв'язання
$\omega=4\ 1/c$	За умовою задачі вигляд рівняння гармонічного ко-
$x=0,25$ *см*	ливання буде мати вигляд:
$\upsilon_x=1\ м/с$	$x=A\sin\omega t$ (1)
t - ?	Швидкість $\upsilon_x=A\omega\cos\omega t$ (2)

Розділивши (1) на (2), одержимо:

$$\frac{x}{\upsilon_x}=\frac{tg\omega t}{\omega} \ \Rightarrow \ tg\omega t=\frac{x\omega}{\upsilon_x}, \quad tg\omega t=\frac{0,25\cdot 4}{1}=1.$$

Тоді $\omega t=\frac{\pi}{4} \ \Rightarrow \ t=\frac{\pi}{4\omega}, \quad t=\frac{3,14}{16}=0,2\,c\,.$

Задача 10. Матеріальна точка знаходиться в точці *А* в середині півсфери. В якому випадку вона скоріше досягне нижньої точки *В* півсфери: якщо без тертя буде рухатись по її внутрішній поверхні або по похилій площині AB? Початкова швидкість тіла рівна нулю.

Дано:	Розв'язання
$l=R$	
$\alpha=45^o$	
$\frac{t_1}{t_2}$ - ?	

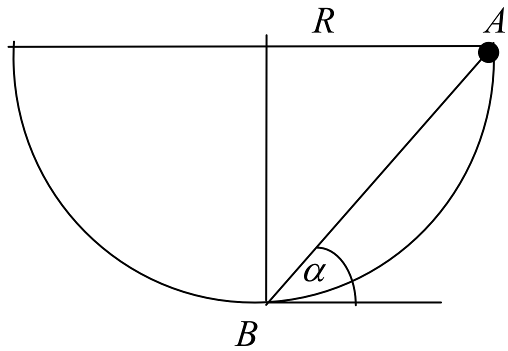


Рис. 3

З умови задачі зрозуміло, що маємо справу з математичним маятником довжини R. Якщо матеріальна точка буде рухатись по внутрішній поверхні півсфери, то час, затрачений на цей рух від A до B буде рівний чверті періоду коливань, тобто $t_1 = \frac{1}{4}T = \frac{1}{4}\cdot 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$.

Якщо рух буде по хорді $AB = R\sqrt{2}$ з прискоренням

$$a = g\sin\alpha = g\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \text{то} \quad AB = \frac{g\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot t_2^2}{2} = \frac{gt_2^2\sqrt{2}}{4} \quad \Rightarrow \quad t_2^2 = \frac{4AB}{g\sqrt{2}} = \frac{4R\sqrt{2}}{g\sqrt{2}} = \frac{4R}{g}; \quad t_2 = 2\sqrt{\frac{R}{g}}.$$

Отже $t_2>t_1$.

Задача 11. До пружини, що має жорсткість k, підвішена чашка. На чашку з висоти h падає без початкової швидкості липка кулька маси m. Знайти амплітуду A коливань, що виникнуть. Масою пружини і чашки нехтувати.

Дано:	Розв'язання
k	Оскільки чашка дуже легка, можна нехтувати втратою
h	механічної енергії при ударі кульки об чашку. Нехай макси-
m	мальне відхилення чашки від початкового положення рівне
A - ?	x. Швидкість чашки і кульки перед початком падіння кульки

дорівнює нулю, значить потенціальна енергія, втрачена кулькою при падінні

$mg(h+x)$ повністю перейшла в енергію деформованої пружини $\frac{kx^2}{2}$. Прирівнюючи ці вирази, маємо:

$$mgh + mgx = \frac{kx^2}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 - \frac{2mg}{k}x - \frac{2mgh}{k} = 0$$

Отже

$$x_{1,2} = \frac{mg}{k} \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}}$$

Обидва рівняння мають сенс і відповідають верхньому і нижньому крайнім положенням чашки при коливаннях. Середнє арифметичне двох рішень буде $\frac{mg}{k}$ і відповідає положенню рівноваги чашки з кулькою. Амплітуда коливань визначається з умови $x_{1,2} = \frac{mg}{k} \pm A$. таким чином

$$A = \sqrt{\left(\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{2mgh}{k}} = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2kh}{mg}}\,.$$

Задача 12. Спостерігач, що стоїть на землі, спостерігає наближення до нього літака, але не чує звуку двигунів. Літак пролітає над спостерігачем і віддаляється. Спостерігач почув звук літака в момент, коли напрям, по якому видно літак, утворює з горизонтом кут φ. Літак летить прямолінійно, паралельно поверхні Землі. Обчислити швидкість літака, якщо кут φ становить 30^o, а швидкість звуку *340 м/с*.

Дано:
$\varphi=30^o$
$\upsilon_з=340$ м/с
$\upsilon_л$ - ?

Розв'язання

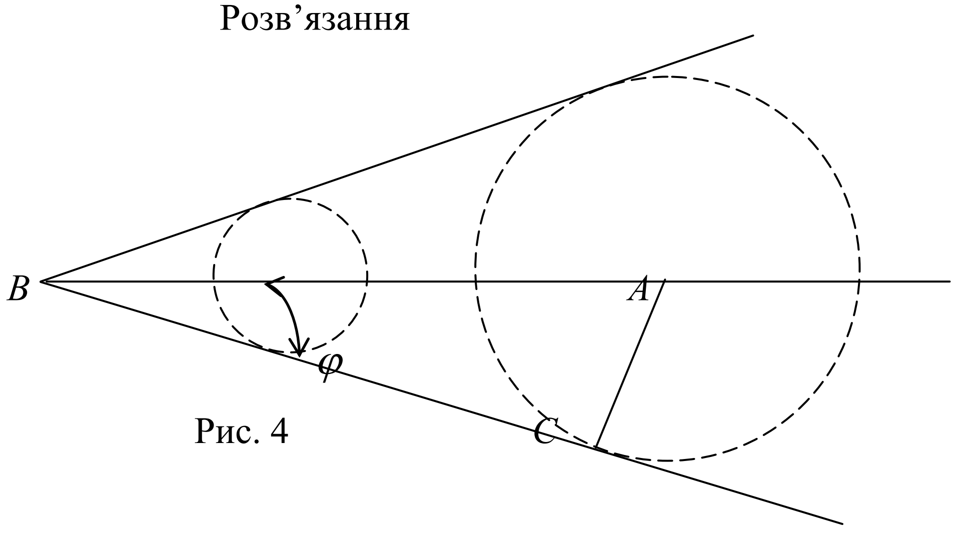


Рис. 4

Літак у кожній точці шляху стає центром сферичної звукової хвилі (рис. 4.4). Радіус відповідної сферичної поверхні, яка є фронтом хвилі, пропорціональний часу, протягом якого звук з даної точки поширюється. Спільна поверхня елементарних звукових хвиль є бічною поверхнею конуса, у вершині якого знаходиться літак. Звук літака чути у всіх точках простору, обмеженого конічною поверхнею.

За час, протягом якого звукова хвиля дійде з точки *A* до спостерігача, що знаходиться в точці *C*, літак пролетить відстань *AB*. З прямокутного трикутника *ABC* маємо:

$$AB = \frac{AC}{\sin\varphi}, \quad або$$

$$\upsilon_л \cdot t = \frac{\upsilon_з \cdot t}{\sin\varphi} \quad \Rightarrow \quad \upsilon_л = \frac{\upsilon_з}{\sin\varphi} = 680\, м/с$$

Задача 13. Звук пострілу і куля одночасно досягають висоти *680 м*. Яка початкова швидкість кулі? Постріл виконано вертикально вгору. Опором середовища знехтувати. Швидкість звуку υ прийняти рівною *340 м/с*.

Дано:	Розв'язання
υ=340 м/с	Куля рухається як тіло, кинуте вертикально вгору, тобто
H=680 м	$H = \upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2}$
υ_0 - ?	Звук розповсюджується рівномірно і $H=\upsilon t$.

Таким чином $\upsilon_0 t - \frac{gt^2}{2} = \upsilon t \quad \Rightarrow \quad \upsilon_0 = \upsilon + \frac{gt}{2}.$ Час $t = \frac{H}{\upsilon}.$ Значить $\upsilon_0 = \upsilon + \frac{gH}{2\upsilon} = 350\, м/с.$

Задача 14. Звукові коливання частоти ν мають в першому середовищі довжину хвилі λ_1, а в другому λ_2. Як зміниться швидкість розповсюдження цих коливань при переході з першого середовища до другого, якщо $\lambda_1=2\lambda_2$ – ?

Дано:	Розв'язання
$\lambda_1=2\lambda_2$	Довжина хвилі $\lambda = \upsilon T = \dfrac{\upsilon}{\nu}$. Важливо знати, що при перехо-
$\dfrac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$ - ?	ді коливань з одного середовища до другого, частота ν зали-

шається незмінною. Отже

$$\frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{\lambda_1 \nu}{\lambda_2 \nu} \quad \Rightarrow \quad \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = 2 \quad \Rightarrow \quad \upsilon_1 = 2\upsilon_2.$$

4.Задачі для самостійного розв'язування

1 Амплітуда незатухаючих коливань точки струни *1 мм*, частота *1кГц*. Який шлях пройде ця точка за *0,2 с*?

2 За яку частину періоду *T* тіло, що виконує гармонічні коливання, проходить весь шлях від середнього положення до крайнього? Першу половину шляху? Другу його половину?

3 Амплітуда коливань кінця ніжки камертона *1 мм*, а частота коливань *500 Гц*. Написати рівняння $x=x(t)$, $\upsilon_x=\upsilon_x(x)$, $a_x=a_x(t)$. Які найбільші значення швидкості і прискорення? В яких положеннях досягаються ці значення?

4 Яку частину періоду *T* тягар маятника знаходиться в межах *1 см* від положення рівноваги, якщо амплітуда його коливань рівна *2 см*?

5 Тягарець на пружині коливається вздовж однієї прямої з амплітудою *2 см*. Період коливань *2 с*. В початковий момент часу тягарець проходив положення рівноваги. Визначити швидкість і прискорення тягарця через *0,25 с*.

6 Період коливань у пружинного маятника з тягарцем маси m_1, рівний T_1, а з тягарцем маси m_2 – T_2. Яким буде період його коливань з масою m_1+m_2.

7 За один і той же проміжок часу один математичний маятник виконує *50* коливань, а другий *30*. Знайти їх довжини, якщо один з них коротше другого на *32 см*.

8 В кабіні висить маятник. Коли кабіна нерухома, його період коливань $T=1$ *с*. Коли кабіна рухається з постійним прискоренням, то період коливань становить $T_1=1{,}2$ *с*. Визначити величину прискорення кабіни.

9 Математичний маятник довжиною l виконує коливання поблизу вертикальної стінки. Під точкою підвісу маятника на відстані $l_1=l/2$ в стінку забито гвіздок. Знайти період T коливань маятника.

10 Яким буде період коливань математичного маятника в кабіні ліфта, що опускається з прискоренням $a>g$?

11 Знайти енергію, яку має математичний маятник масою m і довжиною l, якщо його амплітуда коливань A.

12 На горизонтальній пружині закріплене тіло масою $M=10$ *кг*, яке лежить на абсолютно гладенькому столі. В це тіло попадає і застряє в ньому куля масою $m=10$ *г*, що летіла з швидкістю $\upsilon=500$ *м/с* вздовж осі. Тіло разом з кулею відхиляється від положення рівноваги і починає коливатись відносно нього з амплітудою $A=10$ *см*. Знайти період коливань тіла.

13 Пароплав, проходячи по озеру, створив хвилю, яка дійшла до берега через *1 хв*. Відстань між двома сусідніми "горбами" хвилі становить *1,5 м*, а проміжок часу між двома послідовними ударами об берег *2 с*. Яка відстань від берега до пароплава, що проходить?

14 При якій швидкості поїзда υ підвішений в вагоні маятник довжиною $l=1$*м* буде дуже розгойдуватись, якщо довжина рейок $L=25$ *м*?

15 Знайти довжину звукової хвилі в воді, яка визвана джерелом коливань з частотою *200 Гц*, якщо швидкість звука в воді рівна *1450 м/с*.

5. Відповіді

1) *80 см*.

2) $\frac{T}{4}; \frac{T}{12}; \frac{T}{6}$.

3) *x=0,001 cos1000πt;* υ_x*= - π sin1000πt;*

a_x*= - 1000*π^2*cos1000πt; 3,14 м/с; 9,9 км/с*^{2}.

4) *T/6*.

5) $\upsilon = A\frac{2\pi}{T}\cos\frac{2\pi}{T}t = 4{,}4\,см/с$

$a = -A\frac{4\pi^2}{T^2}\sin\frac{2\pi}{T}t = -14\,см/с^2.$

6) $T = \sqrt{T_1^2 + T_2^2}$.

7) *18 см; 50 см.*

8) $a = g\left(1 - \frac{T^2}{T_1^2}\right) \approx 3\,м/с^2$.

9) $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

10) $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{a-g}}$.

11) $E = \frac{mgA^2}{2l}$.

12) $T = 2\pi\, A(M+m)\big/(m\upsilon) = 1{,}26\,с$.

13) $S = \frac{\lambda}{T}t = 45\,м$.

14) $\upsilon = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}} = 12{,}5\,м/с = 45\,км/ч$.

15) λ*=7,25 м*.